# المحاضرة (١٢)

## الاعداد المركبة COMPLEX NUMBERS

في دوائر التيار المتناوب البسيطة يمكن حل المسائل باستخدام المتجهات الطورية (phasors) اما في الدوائر الاكثر تعقيدا فيمكن تبسيط الحسابات باستخدام جبر الاعداد المركبة ( complex algebra). هذا النظام يمكننا من تمثيل المعادلة التي تمثل التيار او الفولتية والعلاقة الطورية (الزاوية) بشكل جبري بسيط.

وتعتمد هذه الفكرة على تحليل المتجه الطوري الى مركبتين متعامدتين.

وعليه فالعدد المركب يمثل احداثيات نقطة في المستوي ثنائي الابعاد، وان مسقط هذه النقطة على المحورين (X,Y) يعطي المركبة الافقية والمركبة العمودية ويسمى المحور(X) بمحور الاعداد الحقيقية (Real) ويسمى محور(Y) بمحور الاعداد التخيلية (imaginary). ويستخدم الحرف (j) للاشارة الى المحور التخيلي وهو يساوي ($\sqrt{-1}$).

وهناك طريقتان لمثيل العدد المركب وهما :-

١- الطريقة التعامدية (Rectangular) مثل $Z = 3 + j4$

٢- الطريقة القطبية (polar) مثل $Z = 10 \angle 30°$

## Complex numbers algebra جمع الاعداد المركبة

**1- addition and subtraction** **الجمع والطرح**

ملاحظة:- عند الجمع او الطرح نستخدم الطريقة التعامدية (Rectangular) ،

if $Z_1 = 3 + j4$ ،$Z_2 = 1 + j2$

Then $Z_1 + Z_2 = (3 + 1) + j(4 + 2) = 4 + j6$

$$Z_1 - Z_1 = (3 - 1) + j(4 - 2) = 2 + j2$$

**2- Multiplication and division** **الضرب والقسمة**

If $Z_1 = 10 \angle 30^\circ$ , $Z_2 = 5 \angle 10^\circ$

Then $Z_1 \times Z_2 = 10 \times 5 \angle 30^\circ + 10^\circ = 50 \angle 40^\circ$

And $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{10 \angle 30^\circ}{5 \angle 10^\circ} = \frac{10}{5} \angle 30^\circ + 10^\circ$

**3-Raising to power** **الرفع الى قوة اسية**

$(3 \angle 10^\circ)^2 = 3^2 \angle (2*10) = 9 \angle 20^\circ$

**4- Inversion** **مقلوب العدد المركب**

$\frac{1}{3 \angle 30^\circ} = \frac{1}{3} \angle -30^\circ = 0.33 \angle -30^\circ$

**5- Conjugate of complex numbers** **مرافق العدد المركب**

$if\ Z = 3 + j4$

$then\ Z^* = 3 - j4$

## Conversion between Polar and Rectangular form

التحويل من الطريقة التعامدية الى الطريقة القطبية وبالعكس.

**1- Rectangular to Polar**

EX: Convert the complex number $Z = 3 + j4$ to polar form.

$Z = 3 + j4$ Rectangular

$|Z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = 5\ \Omega$

$\emptyset = \tan^{-1}\frac{4}{3} = 53.1^\circ$

$\therefore Z = 5\angle 53.1^\circ$ Polar

2- Polar to Rectangular

EX: Convert the complex numbers $Z = 10\angle 30^\circ$ to Rectangular form

$Z = 10\angle 30^\circ$ Polar

$Z = 10\cos 30^\circ + j10\sin 10$

$= (10 * 0.866) + j(10 * 0.5)$

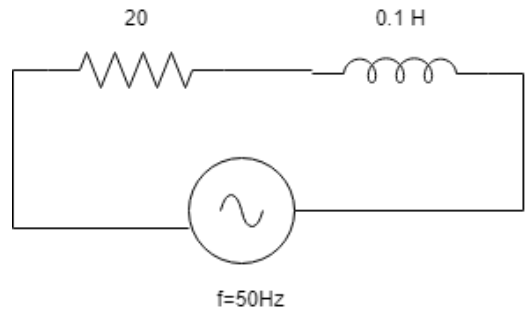
$\therefore Z = 8.66 + j5$

ملاحظة:- يجب ملاحظة الاشارة عند التحويل

EX: express in Rectangular and polar foam the impedance of each of the following at a frequency of (50Hz)

1- 20 Ω Resistance in series with 0.1 H inductance.

2- 50 Ω resistance in series with a 40uF capacitance.




**Solution:- 1)** $\boldsymbol{R = 20\Omega}$

$$\boldsymbol{XL = \omega L = 2\pi f L = 2 * 3.14 * 50 * 0.1}$$
$$\boldsymbol{= 31.4\ \Omega}$$

$\therefore \boldsymbol{Z = R + jXL = 20 + j31.4}$ ..... **Rectangular**

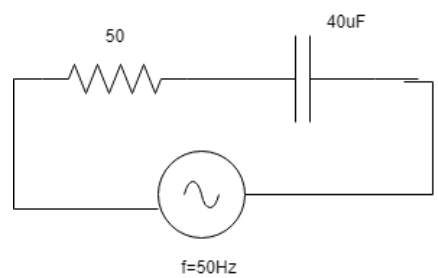
$$\boldsymbol{|Z| = \sqrt{20^2 + 31.4^2} = 37.2\ \Omega}$$

$$\boldsymbol{\emptyset = \tan^{-1}\frac{XL}{R} = \tan^{-1}\frac{31.4}{20} = 57.3°}$$

$\therefore \boldsymbol{Z = |Z|\underline{|\emptyset} = 37.2\ \underline{|57.3°}}$ ..... **Polar**

**2-** $\boldsymbol{R = 50\Omega}$ , $\boldsymbol{XC = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2*3.14*50*40*10^{-6}} = 79.6\ \Omega}$

$\therefore Z = R - jXC = 50 - j79.6$



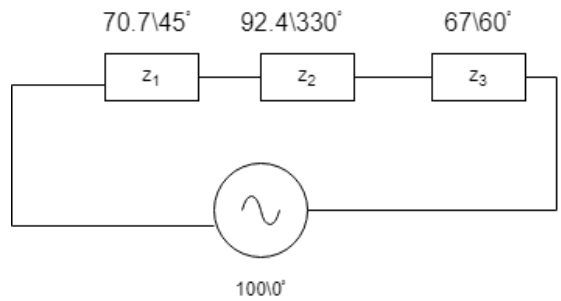

$$|Z| = \sqrt{R^2 - XC^2} = \sqrt{50^2 - 79.6^2}$$

$$|Z| = 94\Omega$$

$$\emptyset = \tan^{-1}\frac{-79.6}{50} = -57.5°$$

$\therefore Z = Z\underline{|-\emptyset} = 94\ \underline{|-57.5°}$ **Polar**

EX: For the circuit shown below calculate current in polar form.




**Sol.**

$$Z_1 = 70.7\angle 45° = 70.7\cos 45° + j70.7\sin 45° = 50 + j50\ \Omega$$

$$Z_2 = 92.4\angle 330° = 92.4\cos 330° + j92.4\sin 330° = 80 - j46.2\ \Omega$$

$$Z_3 = 67\angle 60° = 67\cos 60° + j67\sin 60° = 33.5 + j58\ \Omega$$

$$Z_T = Z_1 + Z_2 + Z_3 = (50 + 80 + 33.5) + j(50 - 46.2 + 58)$$

$$Z_T = 163.5 + j61.8\ \Omega$$ ***Convert to polar***

$$|Z_T| = \sqrt{163.5^2 + 61.8^2} = 174.8\ \Omega$$

$$\emptyset = \tan^{-1}\frac{61.8}{163.5} = \angle 20.7°$$

$$Z_T = 174.8\angle 20.7°\ \Omega$$

$$I_T = \frac{V_T}{Z_T} = \frac{100\angle 0°}{174.8\angle 20.7°}$$

$$= 0.572\angle -20.7°$$